(Đề thi gồm 02 trang)

MÔN THI: TOÁN VÒNG 1 (Toán chung)

Ngày thi: 05/06/2024.

(Thời gian 90 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu I: (2,5 điểm)

1) Cho $A=\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$. Tính A^3.

2) Cho các số thực b,c thỏa mãn $24b+c=-523$. Biết phương trình $x^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 là các số nguyên, tìm x_1,x_2.

Lời giải

1) $A=\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

$$A=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}=3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}=6$$

$\Rightarrow A^3=6^3=216$

2) Theo định lý Viets ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-b\\x_1x_2=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}24\left(x_1+x_2\right)=-24b & (1)\\x_1x_2=c & (2)\end{cases}$

Lấy $-1.(1)+(2)$ ta được: $-24\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2=-523$

$$\Leftrightarrow x_1\left(x_2-24\right)=24x_2-523\ (3)$$

Dễ thấy $x_2=24$ không thỏa mãn $(3)\Rightarrow x_1=\dfrac{24x_2-523}{x_2-24}=\dfrac{24\left(x_2-24\right)+53}{x_2-24}=24+\dfrac{53}{x_2-24}$

Để $x_1,x_2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_2-24\in\{\pm1;\pm53\}\Leftrightarrow x_2\in\{25;23;77;-29\}$

Với $x_2=25\Rightarrow x_1=77$

$x_2=23\Rightarrow x_1=-29$

$x_2=77\Rightarrow x_1=25$

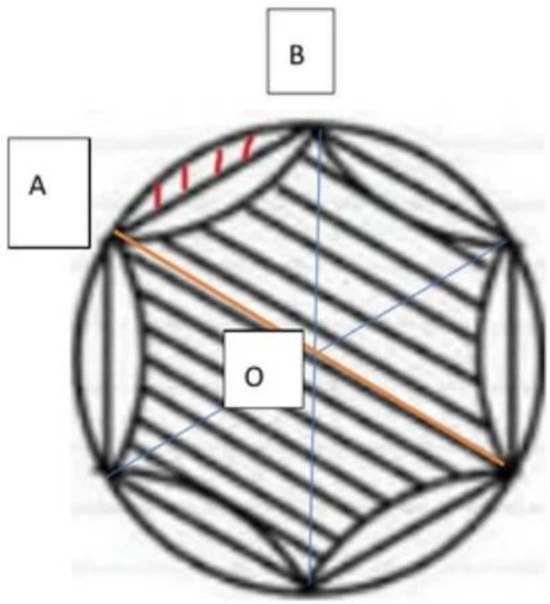
$x_2=-29\Rightarrow x_1=23$

Vậy $\left(x_1;x_2\right)\in\left\{(-29;23);(23;-29);(25;77);(77;25)\right\}$.

Câu II: (1,5 điểm)

Trong hình vẽ, hình lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm (O) có bán kính bằng $2cm$. Trên mỗi cung nhỏ được chắn bởi một cạnh hình lục giác, lấy đối xứng cung qua cạnh đó. Tính diện tích phần gạch chéo.

Lời giải



Diện tích của hình tròn là $S = \pi R^2 = 4\pi\left(cm^2\right)$

Gọi S_1 là phần diện tích được gạch sọc đỏ.

Khi đó Diện tích S_1 = diện tích hình quạt AOB – diện tích tam giác OAB

$$S_1 = \frac{1}{6}S - \frac{OA^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi}{6} - \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Diện tích phần gạch chéo là $S - 12S_1 = 4\pi - 12\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3} - 4\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$

Vậy diện tích cần tìm là $12\sqrt{3} - 4\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Câu III: (3 điểm)

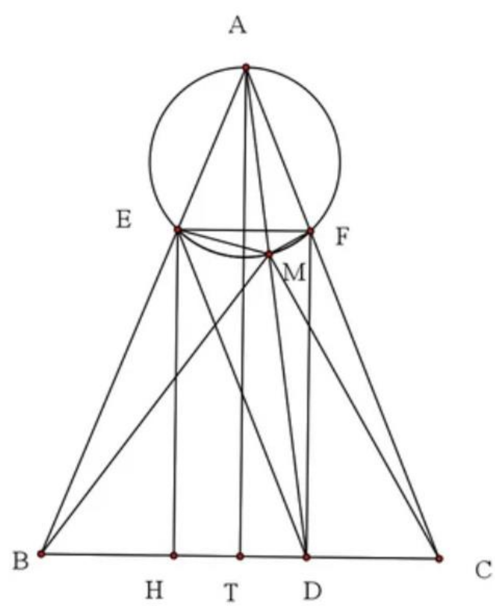
Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy D thuộc BC sao cho $DB = 2DC$. Đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại E, đường thẳng qua E song song với BC cắt AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFE cắt AD tại M khác A.

1) Chứng minh $BDME$, $CDMF$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $MB = 2MA$.

3) Chứng minh $BMD = 2.CMD$.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$

Vì $\begin{cases} EF // \text{CB} \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow AE = AF \Rightarrow AEF = AFE$

Mà $\left.\begin{matrix} AEF = ABC \\ AFE = AME \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABC = AME \Rightarrow$ tứ giác $BDME$ nội tiếp

Chứng minh tương tự:

$ACB = AFE = AEF = AMF$ nên $CDMF$ là tứ giác nội tiếp.

b)

$EMB = EDB = ACB = AFE = AEF = AMF$

$\Rightarrow AMB = EMB + EMA = AMF + EMA = EMF$

Ta được: $\Delta AMB \backsim \Delta FME\,(g.g)$ vì $AMB = FME;\ EAM = EFM = \dfrac{1}{2}$ sđ EM

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MF}{ME}\,(1)$

Ta lại có: $\Delta AMF \backsim \Delta ACD\left(g.g\right)$ vì chung CAD và $ACD = AMF \Rightarrow \dfrac{MF}{CD} = \dfrac{AM}{AC}\left(2\right)$

$\Delta AME \backsim \Delta ABD\left(g.g\right)$ vì chung BAD và $ABC = AME \Rightarrow \dfrac{ME}{BD} = \dfrac{AM}{AB}\left(3\right)$

Từ $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra: $\dfrac{MF}{CD} = \dfrac{AM}{AB}\cdot\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{ME}{BD} \Rightarrow \dfrac{MF}{ME} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{1}{2}$

Thay vào $\left(1\right)$ ta được: $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{2}$

c) Vẽ đường cao AT ta được: $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{TD}{TC}$ suy ra $FD \perp BC$ và ΔEBD cân

Lấy H là trung điểm BD

Ta có: $\Delta EHD = \Delta FDC\left(c.c.c\right) \Rightarrow HED = DFC$

$$\left.\begin{array}{l} DFC = \dfrac{1}{2}BED \\ DFC = DMC \\ BED = BMD \end{array}\right\} DMC = \dfrac{1}{2}BMD$$

$\Rightarrow BMD = 2.CMD$

Câu IV: (1,5 điểm) Tìm số thực x thỏa mãn $x + \sqrt{2024}$ và $\dfrac{185}{x} - \sqrt{2024}$ đều là số nguyên.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x + \sqrt{2024} = m & (1) \\ \dfrac{185}{x} - \sqrt{2024} = n & (2) \end{cases}$; $m; n \in \mathbb{Z}$

Từ $\left(1\right)$ ta được $x = m - \sqrt{2024}$, thay vào $\left(2\right)$ ta được:

$\dfrac{185}{m - \sqrt{2024}} - \sqrt{2024} = n$, biến đổi ta được $2209 - mn = \left(m - n\right)\sqrt{2024}$ $\qquad(3)$

*TH1: $m - n = 0$, khi đó phương trình $\left(3\right)$ có dạng: $2209 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 47$ (thỏa mãn)

*TH2: $m-n\neq 0$, khi đó ta có $\dfrac{2209-mn}{m-n}=\sqrt{2024}$ (4)

Do $m;n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{2209-mn}{m-n}\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{2024}$ là số vô tỉ, nên không tồn tại m,n thỏa mãn

Vậy $x\in\left\{47-\sqrt{2024};-47-\sqrt{2024}\right\}$.

Câu V: **(1,5 điểm)** Cho 45 số $a_1;a_2;a_3;...;a_{45}$ sao cho mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị $0,2,3$. Biết $(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+...+(a_{45}-2)^2=65$ và $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+...+(a_{45}-3)^3=-280$

Trong 45 số trên, có bao nhiêu số nhận giá trị 0 ?

Lời giải

Gọi $x;y;z$ lần lượt là số ghi giá trị a nhận giá trị $0,2,3$; $\left(x;y;z\in N;\ x;y;z\le 45\right)$.

Ta có: $\begin{cases}x+y+z=45\\x(0-2)^2+y(2-2)^2+z(3-2)^2=65\\x(0-3)^3+y(2-3)^3+z(3-3)^3=-280\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=45\\4x+0y+z=65\\-27x-y+0z=-280\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=45\\4x+z=65\\-27x-y=-280\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\y=10\\z=25\end{cases}$

Vậy có 10 số nhận giá trị 0 .